UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MoD200 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	28. november 2002
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1 Ulike spørsmål

Avgjør om følgende påstander er sanne eller gale, begrunn svaret.

1a

Hvis $\mathbf{A}$ er positiv semidefinitt er $\mathbf{I} + \mathbf{A}^3$ positiv definitt.

Løsning Sann. Siden $\mathbf{A}$ er symmetrisk er $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^3)^T = \mathbf{I} + \mathbf{A}^3$ så $\mathbf{I} + \mathbf{A}^3$ er symmetrisk.For $\mathbf{x} \neq 0$ og $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ finner vi $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{y} \geq 0$ siden $\mathbf{A}$ er positiv semidefinitt. Det gir

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{I} + \mathbf{A}^3)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^3\mathbf{x} \geq \|\mathbf{x}\|_2^2 > 0$$

så $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^3)$ er positiv definitt.

1b

En singulær 2 ganger 2 matrise har ikke en LU-faktorisering.

Løsning Gal. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har LU-faktoriseringen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Konjugerte gradienter

2a

Gitt metoden med konjugerte gradienter for å løse det lineære ligningssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$. Utled en formel for $\mathbf{x}_1$ dersom vi starter med $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. (Hint: $\mathbf{x}_1$ er gitt som beste approksimasjonen i $\mathbf{A}$-norm til den eksakte løsningen $\mathbf{x}$ fra Krylovrommet $W_1 = \text{span}(\mathbf{f})$.)

Løsning Siden $\mathbf{x}_1$ er vektorprojeksjonen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{f}$ finner vi

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle}\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}^T\mathbf{f}}{\mathbf{f}^T\mathbf{A}\mathbf{f}}\mathbf{f}.$$

Oppgave 3 Et lineært ligningssystem

Anta $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ er positiv definitt og at $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ har rang m. Vi antar også at Cholesky-faktoriseringen av $\mathbf{A}$ er kjent og at n er mye større enn m. Du kan videre anta at algoritmen for å foreta en Cholesky-faktorisering av en positiv definitt matrise og algoritmene for forlengs og baklengssubstitusjon er kjente.

Vi definerer matrisen $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$.

3a

Vis at $\mathbf{C}$ er positiv definitt. Hint: Det er vist i kompendiet at hvis $\mathbf{E}$ er en matrise med lineært uavhengige kolonner er $\mathbf{E}^T\mathbf{E}$ positiv definitt.

Løsning La $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ være Cholesky-faktoriseringen av $\mathbf{A}$. Vi har da

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{E}^T\mathbf{E}$$

hvor $\mathbf{E} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}^T$. Siden $\mathbf{B}$ har rang m har $\mathbf{B}^T$ lineært uavhengige kolonner. Siden $\mathbf{L}^{-1}$ er ikke-singuær har derfor $\mathbf{E}$ lineært uavhengige kolonner. Fra hintet følger at $\mathbf{C}$ er positiv definitt.

3b

Gi en effektiv metode basert på Cholesky-faktorisering av $\mathbf{C}$ som til gitt $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ løser ligningssystemet $\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{d}$ uten å beregne $\mathbf{A}^{-1}$.

Løsning Vi beregner først $\mathbf{C}$ på formen $\mathbf{C} = \mathbf{E}^T\mathbf{E}$ og løser så $\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{d}$ ved Cholesky faktorisering av $\mathbf{C}$. Vi har fra forrige punkt at $\mathbf{E} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}^T$ slik at $\mathbf{E}$ kan finnes ved å løse matriseligningen $\mathbf{L}\mathbf{E} = \mathbf{B}^T$. Dette gjøres ved forlengssubstitusjoner på kolonnene i $\mathbf{B}^T$.

(Fortsettes på side 3.)

3c

Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n,m+n}$$

er ikke-singulær.

Løsning Vi må vise at det homogene systemet $\mathbf{Ax}+\mathbf{B}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ bare har løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Multipliserer vi første ligning i dette systemet med $\mathbf{x}^T$ og bruker at $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ fra andre ligning får vi

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{Ax} + \mathbf{B}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

Men siden $\mathbf{A}$ er positiv definitt må vi ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Første ligning reduseres nå til $\mathbf{B}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ og siden $\mathbf{B}^T$ har lineært uavhengige kolonner er $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Det følger at matrisen er ikkesingulær.

Oppgave 4 Singulærverdidekomposisjon

4a

La $\mathbf{A} = \mathbf{xy}^T \in \mathbb{R}^{m,n}$ hvor $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$ og m, n er positive heltall med $m \geq n$. Finn singulærverdiene til $\mathbf{A}$.

Løsning
Singulærverdiene er kvadratroten av egenverdiene til $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Vi finner

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = (\mathbf{xy}^T)^T(\mathbf{xy}^T) = \mathbf{yx}^T\mathbf{xy}^T = \|\mathbf{x}\|_2^2\mathbf{yy}^T$$

Siden $\mathbf{A}$ har rang én har $\mathbf{A}$ en positiv singulær-verdi og $n-1$ singulærverdier lik null. For å finne den positive singulærverdien gjetter vi at $\mathbf{y}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ og finner

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ay} = \|\mathbf{x}\|_2^2\mathbf{yy}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|_2^2\|\mathbf{y}\|_2^2\mathbf{y}.$$

Vi konkluderer at singulærverdiene er gitt ved

$$\sigma_1 = \|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2, \quad \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0.$$

4b

Vis at singulærverdidekomposisjonen til $\mathbf{A}$ kan skrives $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ hvor $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$ er Householdermatriser. (En Householdermatrise $\mathbf{H}$ kan skrives på formen $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{uu}^T$ hvor $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.)

Løsning Vi har fra forige punkt at

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(Fortsettes på side 4.)

hvor $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1, 0, \ldots, 0)$. Første kolonne i $\mathbf{V}$ er den normaliserte egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|_2$ til $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Vi finner $\mathbf{V}$ ved å utvide $\mathbf{v}_1$ til en ortonormal basis $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ for R^n og la $\mathbf{V}$ være søylene i denne matrisen. En slik utvidelse får vi ved å la $\mathbf{V}$ være en Householdermatrise slik at $\mathbf{V}\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$. For siden $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}$ er $\mathbf{V}\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_1$ er første kolonne i $\mathbf{V}$. Første kolonne i $\mathbf{U}$ finner vi ved å sammenligne første kolonne i $\mathbf{AV} = \mathbf{U}\Sigma$. Vi finner

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T)\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

Vi kan nå la $\mathbf{U}$ være en Householdermatrise slik at $\mathbf{U}\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$.

slutt